§ Movimento em 2 e 3-Dim

Operações elementares com vetores e cálculo vetorial:

i) multiplicação por um escalar:

$$\alpha \vec{A} \qquad , \quad \alpha \text{ escalar};$$

ii) soma de vetores:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \; ;$$

iii) combinação linear de vetores

$$\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} = \vec{C}$$

Os vetores são representados por componentes de maneira natural em 'coordenadas cartesianas', usando uma base ortonormal: $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

$$\vec{A} = A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}$$

ou equivalentemente:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z).$$

Como entender as operações acima?

i) $\alpha \vec{A} = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z)$

ii) $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

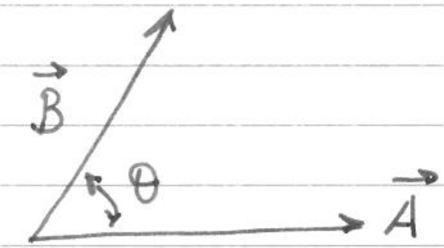
iii) $\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = (\alpha A_x + \beta B_x, \alpha A_y + \beta B_y, \alpha A_z + \beta B_z)$

Def. Módulo de um vetor, $|\vec{A}|$.

$$|\vec{A}| \equiv \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Def. Produto Escalar $\vec{A}, \vec{B}$ (é comutativo)

Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ definem um plano. Seja θ o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Definimos o 'produto escalar' como:



$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}|\cdot|\vec{B}| \cos\theta .$$

Veja que, a partir de um par de vetores, definimos um escalar.

Def. Ortogonalidade, $\perp$

$\vec{A}$ e $\vec{B}$ são ortogonais, e escrevemos $\vec{A} \perp \vec{B}$, quando:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0,$$

ou seja $\theta = \pm \pi/2$

Def. Base 'ortonormal'.

A base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ satisfaz

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1,$$

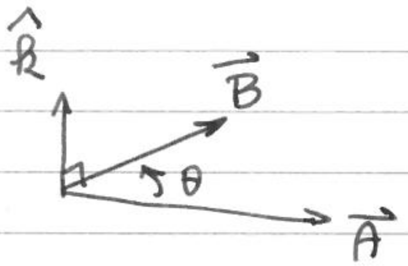
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0.$$

Usando essas relações e a linearidade do produto escalar, obtemos:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

<u>Def</u>. <u>Produto vetorial</u> (cruz, externo, ...)

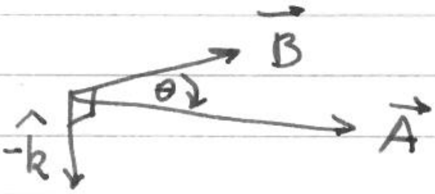
A partir de um par de vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, obtemos outro vetor $\vec{C}$, perpendicular ao plano $(\vec{A},\vec{B})$. Aqui importa o ângulo orientado $\vec{\theta}$ que vai de $\vec{A}$ para $\vec{B}$. O vetor unitário $\hat{k}$ se determina usando a regra da 'mão direita'



$$\vec{A}\times\vec{B} \equiv \vec{C} = |\vec{A}||\vec{B}|\,\mathrm{sen}\,\theta\ \hat{k}$$

O produto não é comutativo, porque

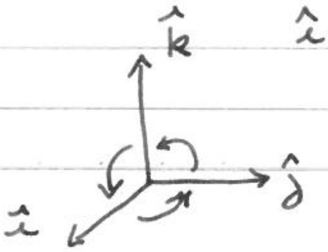
$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$



Para a base ortonormal 'direita' temos:

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}\ ,\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}\ ,\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$



Usando as relações para a base e a linearidade do produto vetorial, obtemos:

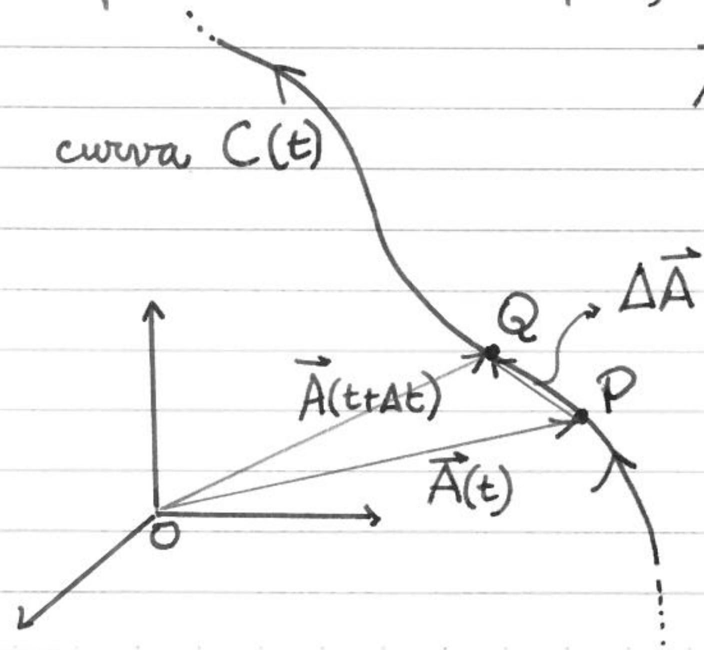
$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x)$$

e escrevemos simbolicamente os produtos (antisimétricos) como um determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

§ Diferenciação de um vetor em relação a um parâmetro escalar

No caso importante do movimento, o parâmetro escalar é o tempo. Queremos calcular derivadas temporais de vetores (posição, velocidade, outros).



$$\vec{A}(t) + \Delta\vec{A} = \vec{A}(t+\Delta t)$$

<u>Def.</u> Derivada vetorial

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right),$$

onde

$$\Delta\vec{A} = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)$$

Geometricamente, percebemos que a derivada é um vetor tangente à curva C(t), no ponto P.
As regras usuais de derivação são satisfeitas para campos vetoriais:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} ,$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} ,$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} ,$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\vec{A}) = \varphi\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\vec{A} .$$

Nesta última, $\varphi(t)$ é uma função escalar.

Integração de vetores sobre variedades

Aqui interessa a dependência espacial de campos vetoriais:

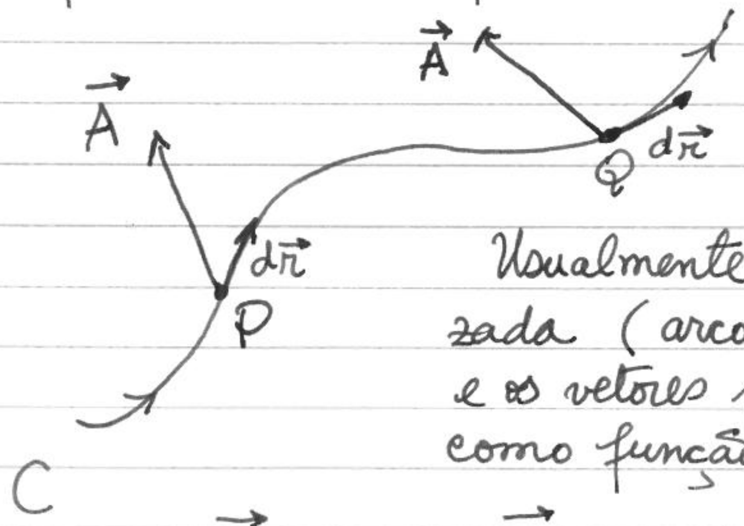
$$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$$

A. Integral de linha

Para uma dada curva C no espaço e uma função vetorial $\vec{A}$, consideramos a integral de $\vec{A}$ sobre a curva C:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_C (A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz)\,,$$

onde o infinitesimal $d\vec{r}$ está dirigido na direção em que a curva é percorrida.



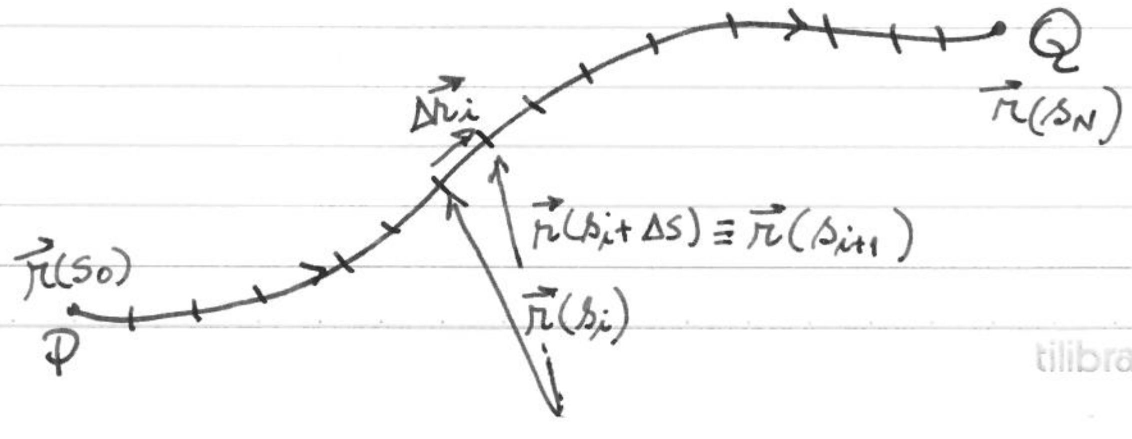
Usualmente a curva é parametrizada (arcoparâmetro, tempo...) e os vetores podem ser escritos como função do parâmetro:

$$\vec{A}\cdot d\vec{r} = \vec{A}(s)\cdot\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)ds\,.$$

A integração é um processo limite de uma soma discreta. Definimos um conjunto discreto de valores do parâmetro:

$$s_{i+1} \equiv s_i + \Delta s\,,$$

s_0 é o ponto inicial P e s_N seja o final Q



Seja : $\Delta\vec{r}_i \equiv \vec{r}(s_i+\Delta s) - \vec{r}(s_i)$

Temos a soma que aproxima a integração:

$$S(\Delta s) = \sum_i \vec{A}(s_i)\cdot\Delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{A}(s_i)\cdot\left(\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta s}\right)\Delta s ,$$

com $$\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta s} = \frac{\vec{r}(s_i+\Delta s)-\vec{r}(s_i)}{\Delta s}$$

e tomando o limite $\Delta s \to 0$:

$$\lim_{\Delta s\to 0} S(\Delta s) = \lim_{\Delta s} \sum_i A(s_i)\cdot\left(\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta s}\right)\Delta s$$

$$= \oint_P^Q \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{s_P}^{s_Q} ds\left(\vec{A}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

$$= \int ds\left(A_x\frac{dx}{ds} + A_y\frac{dy}{ds} + A_z\frac{dz}{ds}\right)$$

$$= \int ds\, f(s) ,$$

passa a ser uma integral comum sobre o parâmetro 's'.

No caso do movimento, usamos como parâmetro o tempo e a integral de linha pode ser transformada numa integral sobre o tempo.

Uma integral de linha importante é o trabalho feito por uma força ao longo de uma trajetória C:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \,.$$

Parametrizando a trajetória com o tempo, obtemos:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right),$$

onde $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P$, é a potência.

Esta integral de linha pode ser usada para definir a função potencial:

$$W(P_1 \to P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right)$$

$$\overset{?}{\equiv} V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2) \,,$$

onde $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$, $\vec{x}_2 = \vec{x}(t_2)$.

Exemplos de derivadas temporais

A posição da partícula, em relação a um SR dado, é representada por um vetor:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \; ,$$

que depende parametricamente do tempo. A velocidade e a aceleração são obtidas por derivação:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}} \; ,$$

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \ddot{\vec{r}} \, .$$

Usando coordenadas cartesianas (x, y, z) em relação a um sistema de eixos fixos, obtemos as relações:

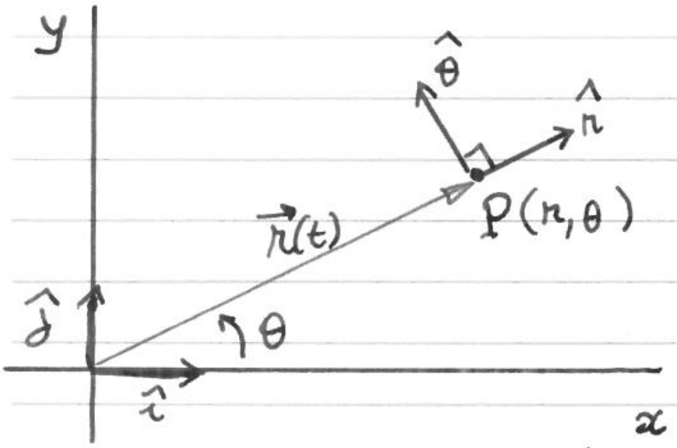
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k} = \sum_i x_i \hat{e}_i \; ,$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} + \dot{z}\,\hat{k} = \sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)\hat{e}_i \; ,$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath} + \ddot{z}\,\hat{k} = \sum_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\hat{e}_i \; ,$$

onde x_i, $(i=1,2,3)$, são as componentes (x, y, z) e os vetores unitários $\hat{e}_i$, $(i=1,2,3)$, são os vetores $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Calcular usando coordenadas cartesianas é muito simples, porque a base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ de vetores está fixa no tempo. Não é o caso de coordenadas curvilíneas gerais, onde a orientação da base pode mudar no tempo.

Exemplo no plano: coordenadas polares



O vetor posição, em coordenadas polares, se escreve simplesmente como:

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \,, \qquad (1)$$

onde o vetor unitário $\boxed{\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}}$.

Vemos que a orientação deste vetor depende do ponto escolhido. Portanto irá a depender do tempo.

Para obtermos a velocidade, derivamos a expressão (1):

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right) = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}}$$

e calculamos $\dot{\hat{r}}$:

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt}\hat{r} = -\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j}$$

$$= \dot{\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right)$$

Def. Vetor de coordenadas $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} \equiv -\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \,. \qquad (2)$$

$\hat{\theta}$ é um vetor $\perp$ a $\hat{r}$, unitário, que aponta na direção de crescimento da variável θ.

Portanto, a velocidade acaba tendo uma componente radial v_r e uma componente angular v_θ:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta},\\ &= \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta},\end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot{r}\,, \\ v_\theta &= r\dot{\theta}\,.\end{aligned}} \qquad (3)$$

A orientação de $\hat{\theta}$ também varia de ponto para ponto. Calculamos sua derivada temporal:

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\right) = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} -$$
$$- \dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}\right)$$
$$= -\dot{\theta}\,\hat{r}\,.$$

Temos as relações:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\,\hat{\theta}\,,\\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\,\hat{r}\,.\end{aligned}} \qquad (4)$$

Usando (4), calculamos a aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)$$

$$= \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r}$$

e juntando componentes:

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \ ,$$

ou seja:

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \ , \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \ . \end{aligned}} \qquad (5)$$

Decompondo a força segundo os vetores de coordenadas

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} \ ,$$

escrevemos as eqs. de Newton no plano, como:

$$\boxed{\begin{aligned} m a_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \ , \\ m a_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \ . \end{aligned}} \qquad (6)$$

Vemos que elas não tem a forma simples de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \ , \\ m\ddot{y} &= F_y \ . \end{aligned} \qquad (7)$$

'As eqs. de Newton <u>não</u> são covariantes gerais para coordenadas arbitrárias'

Tentando deixar as eqs. (6) na forma de (7), passamos a escrever os termos 'anômalos' no lado direito:

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2,$$

$$mr\ddot{\theta} = F_\theta - 2m\dot{r}\dot{\theta}.$$

Um observador preso ao sistema móvel $(\hat{r}, \hat{\theta})$, que em geral, é acelerado, sentirá o efeito desses termos, que são chamados de 'forças inerciais' (pelo fato que aparecem em sistemas não inerciais).

$$F_{CF} \equiv mr\dot{\theta}^2, \text{ 'força centrífuga'}$$

$$F_{\mathcal{C}} \equiv -2m\dot{r}\dot{\theta}, \text{ 'força de Coriolis'}$$

▸ Caso particular importante: Força central

$$\vec{F} = F_r(r)\hat{r} \quad (F_\theta \equiv 0)$$

1ª eq. de (6):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r(r)$$

A 2ª eq. de (6) fornece uma lei de conservação:

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad / \times r$$

$$0 = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$$= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

Def. Momento angular, L

$$L \equiv m r^2 \dot{\theta}$$

Obtemos neste caso,

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = cte.$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad , \quad \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}.$$

Substituindo na 1ª eq. de Newton:

$$m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3}\right) = F_r(r)$$

ou

$$m\ddot{r} = F_r(r) + \underbrace{\frac{L^2}{m r^3}}_{\text{força centrífuga.}}$$

Kepler descobriu esta lei de conservação no movimento planetário. Na sua form ção original, foi chamada de 2ª Lei de Kepler.

Def. Momento Angular, $\vec{L}$

No caso geral, $\vec{L}$ é definido como:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

para uma partícula de massa 'm'.

Exercício

No caso de uma trajetória planar, $\vec{L}$ é perpendicular ao plano da órbita. Em coordenadas polares para o plano, temos:

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\theta}\, \hat{k},$$

onde $\hat{k}$ é um vetor unitário perpendicular ao plano, orientado segundo a 'regra da mão direita' em relação ao movimento.